

文章编号: 1000-7598-(2003) 05-0759-05

刚性承台下变截面柔性桩与地基相互作用的线性分析

刘 杰^{1, 2}, 张可能²

(1. 株洲工学院 土木工程系, 湖南 株洲 412008; 2. 中南工业大学 资源环境工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘 要: 对桩侧土及桩端土均采用线性荷载传递函数, 同时, 考虑桩周土所分担的荷载对单桩荷载传递规律的影响, 利用力学理论及微分方程的近似解法—子域法, 推出了刚性承台下变截面柔性单桩与地基相互作用的系列近似解析算式, 并通过算例, 将承台下变截面柔性桩的情况与同体积的等截面柔性桩的情况进行了对比。对比表明: 改变桩型能提高柔性单桩及单桩承台的承载力。将模型试验结果与计算结果进行了比较, 验证了解析算式的可行性。

关 键 词: 刚性承台; 变截面柔性桩; 相互作用

中图分类号: TU 472 **文献标识码:** A

Linear analysis of interaction of flexible piles with variable cross section and ground soil under rigid pile cap

LIU Jie^{1, 2}, ZHANG Ken-neng²

(1. Department of Civil Engineering, Zhuzhou institute of technology, Zhuzhou 412008, China;

2. College of Resources, Environment and Civil Engineering, Central South University, Changsha 410083 China)

Abstract: Based on using linear load transfer function to pile-side soil and pile-end soil, and considering influence of sharing load of the pile-side soil on load transfer law of piles, and using theory of mechanics and approximate solution method—district method of differential equation, a set of approximate analytical formulas of interaction for a flexible single pile with variable cross section and ground soil are derived. For rigid pile cap, situation of flexible pile with variable cross-section are compared with situation of flexible pile with constant cross section by an example; the results show that the bearing capacity of the flexible pile and the composite foundation may be raised by changing pile type. The results of the model test are compared with the results. It is shown that the proposed method has good precision.

Key words: rigid pile cap; flexible pile with variable cross section; interaction

1 前 言

在工程实际中, 一般利用柔性桩与桩周土一起组成柔性桩复合地基。目前, 柔性桩复合地基常见的有: 土桩、灰土桩、二灰桩、水泥土桩、CFG 桩、低强度混凝土桩等多种类别, 研究承台下柔性单桩荷载传递规律有重要的实际意义。文[1]用荷载传递法分析了柔性桩复合地基的性状; 文[2]利用 Mindlin 应力解答和分层总和法及桩间土刚性滑动模型, 分析了柔性桩的荷载传递规律; 文[3]利用有限单元法分析了复合地基中的桩土相互作用问题; 文[4]利用有限里兹单元法分析了成层土中桩土相

互作用问题; 文[5]提出了复合本构方法计算柔性桩复合地基的沉降; 文[6]利用 Poulos 的结果对搅拌桩的性状进行了探讨。以上方法, 或是将柔性桩复合地基作为整体考虑, 不能显示出桩与桩周土的相互作用特征; 或是分析自由单桩的荷载传递规律, 未考虑桩周土所分担的荷载对桩基荷载传递规律的影响, 因而, 不能完全反映出柔性桩复合地基的工作性状。文[7]通过实验得出了自由单桩在有边载和无边载条件下桩的荷载传递规律有明显的区别, 并指出: 由于桩间土承载能力的发挥, 复合地基中桩的承载特性与自由单桩不同。文[8]~[11]利用现场

收稿日期: 2002-06-11

基金项目: 湖南省教育厅基金资助项目 (No. 01B028)

作者简介: 刘杰, 男, 1963 年生, 博士, 副教授。主要从事地基处理及桩土相互作用的教学与研究。

试验和有限元分析方法对变截面石灰土井桩进行过系列研究,并指出变截面石灰井桩与普通石灰井桩相比,单位体积承载力有大幅度地提高,同时指出:柔性单桩是典型的摩擦桩,桩侧摩阻力在桩所承担的荷载中占相当大的比例,且其桩侧摩阻力首先在桩顶附近达到最大值,尔后,逐渐地向下发展,但也未考虑桩周土所分担的荷载对石灰土井桩荷载传递规律的影响。众所周知:柔性桩复合地基的承载能力取决于柔性桩的置换率及单桩的承载能力;同时,地基土的强度一般随深度而增加。因此,如果将柔性桩做成如图 1(a)或图 1(b)所示的形状,既能充分利用地基土的天然特性,也能充分利用桩侧摩阻力的特点来提高柔性单桩的承载能力,同时,也提高了基础底面以下一定深度范围内柔性桩的置换率,使基底以下一定深度范围内的土层形成类似于天然地基的硬壳层,提高附加应力的扩散能力,从而,达到有效提高复合地基承载力的目的。

本文对桩侧土及桩端土均采用线性荷载传递函数,同时,考虑桩周土所分担的荷载对单桩荷载传递规律的影响,利用力学理论及微分方程的近似解法—子域法,探讨了刚性承台下变截面柔性单桩与地基的相互作用问题,并指出了:改变桩型能提高单桩及其单桩承台的承载力。为了验证本文方法的可行性,笔者将模型试验结果与本文计算结果进行了比较,对比表明:本文方法有较好的精度。

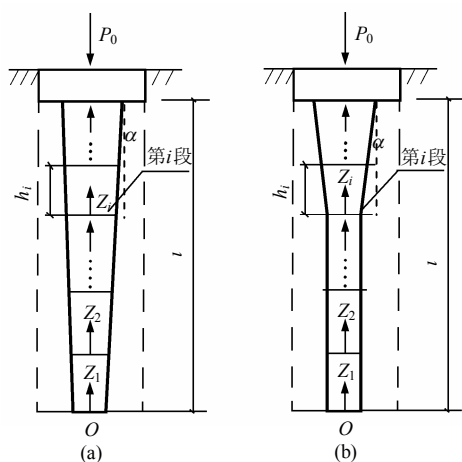


图 1 桩土计算体系

Fig.1 Calculation system of pile-soil

2 桩土荷载传递函数及基本假定

(1) 忽略桩周土的径向位移及承台外土的竖向位移,并设桩及承台下的桩周土轴向变形均匀;
(2) 设承台绝对刚性,即承台下的桩土竖向位移相等;
(3) 桩土之间的摩擦阻力及承台边缘的各竖直

面上的摩擦阻力(如图中虚线所示)及桩底和桩周土底阻力分别采用式(1)~(3)所示的线性模型:

$$\tau_p(z) = k_p [w_p(z) - w_s(z)] \quad (1)$$

$$\tau_s(z) = k_s w_s(z) \quad (2)$$

$$p_b = k_b s_b; p_s = k_s s_s \quad (3)$$

式中 k_p , k_s 分别为桩土之间和土与土之间的抗剪刚度 (kN/m^3); k_b 为桩端土抗压刚度; $w_p(z)$, $w_s(z)$ 分别为桩截面和承台下桩周土截面的轴向位移; s_b 为桩底位移; s_s 为桩周土底位移。

3 桩土相互作用分析

考虑到桩的变截面特性,为此,将桩分成 N 段,每段建立如图 1 所示的局部坐标 z_i 。图 1 中: h_i 为第 i 段桩的长度 ($i=1, 2, \dots, N$), 设桩长为 l 。第 i 段桩的平均半径 $r_{pi} = r_{p0} - h_i \tan \alpha / 2 - \sum_{j=1}^{i-1} h_{j-1} \tan \alpha$;

r_{p0} 为桩顶半径; α 的含义见图 1; 承台尺寸为 $a \times b$ 。为研究桩土相互作用,取如图 1 所示虚线区域的桩土体系为研究对象,从第 i 段桩体上取微段 dz_i 为分析对象,受力如图 2 所示,由微段的竖向平衡条件及轴向拉压虎克定律,同时,利用式(1)~(3)可得桩的控制微分方程为

$$\frac{d^2 w_{pi}(z_i)}{dz_i^2} = \frac{2k_p}{E_p r_{pi}} [w_{pi}(z_i) - w_{si}(z_i)] \quad (4)$$

$$P_i(z_i) = -E_p \pi r_{pi}^2 \frac{dw_{pi}(z_i)}{dz_i} \quad (5)$$

式中 $P_i(z_i)$ 为第 i 段桩截面上的轴力; E_p 为桩的弹性模量; $w_{pi}(z_i)$ 为第 i 段桩截面的轴向位移; $w_{si}(z_i)$ 为第 i 段桩周土截面的轴向位移。

从第 i 段桩周土中取出微段 dz_i 为研究对象,受力如图 3 所示,由微段的竖向平衡条件及轴向拉压虎克定理,同时,利用式(1)~(3),可得桩周土的控制微分方程为

$$\frac{d^2 w_{si}(z_i)}{dz_i^2} = \frac{2[(a+b)k_s + \pi r_{pi} k_p]}{E_s (ab - \pi r_{pi}^2)} w_{si}(z_i) - \frac{2\pi r_{pi} k_p}{E_s (ab - \pi r_{pi}^2)} w_{pi}(z_i) \quad (6)$$

$$P_{si}(z_i) = -E_s (ab - \pi r_{pi}^2) \frac{dw_{si}(z_i)}{dz_i} \quad (7)$$

式中 E_s 为桩周土的变形模量; $P_{si}(z_i)$ 为第 i 段桩周土截面上的轴力。联立式(4), (6)可得

$$\frac{d^4 w_{pi}(z_i)}{dz_i^4} - \lambda_{1i} \frac{d^2 w_{pi}(z_i)}{dz_i^2} + \lambda_{2i} w_{pi}(z_i) = 0 \quad (8)$$

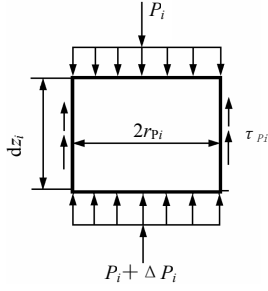


图2 桩单元受力图
Fig.2 Bearing force of pile element

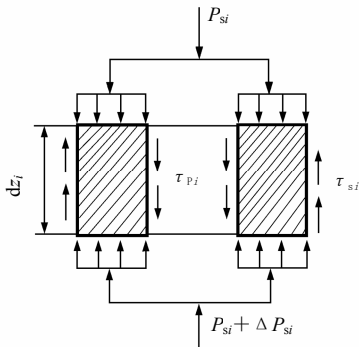


图3 土单元受力图
Fig.3 Bearing force of soil element

式中

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1i} &= \lambda_{pi}^2 + \lambda_{si}^2; \quad \lambda_{2i} = \lambda_{pi}^2 (\lambda_{si}^2 - \lambda_{pi}^2); \\ \lambda_{pi} &= \sqrt{2k_p / E_p r_{pi}}; \\ \lambda_{si} &= \sqrt{2[(a+b)k_s + \pi r_{pi} k_p] / E_s (ab - \pi r_{pi}^2)}; \\ \lambda_i &= \sqrt{2\pi r_{pi} k_p / E_s (ab - \pi r_{pi}^2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

求解式(8)可得

$$w_{pi}(z_i) = c_1 e^{\mu_{1i} z_i} + c_2 e^{-\mu_{1i} z_i} + c_3 e^{\mu_{2i} z_i} + c_4 e^{-\mu_{2i} z_i} \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mu_{1i} &= \sqrt{(\lambda_{1i} + \sqrt{\lambda_{1i}^2 - 4\lambda_{2i}}) / 2}; \\ \mu_{2i} &= \sqrt{(\lambda_{1i} - \sqrt{\lambda_{1i}^2 - 4\lambda_{2i}}) / 2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式(10)代入式(6), 由微分方程理论可得式(6)的解为

$$w_{si}(z_i) = c_5 e^{\lambda_{si} z_i} + c_6 e^{-\lambda_{si} z_i} + A_{1i} c_1 e^{\mu_{1i} z_i} + A_{1i} c_2 e^{-\mu_{1i} z_i} + A_{2i} c_3 e^{\mu_{2i} z_i} + A_{2i} c_4 e^{-\mu_{2i} z_i} \quad (12)$$

式中 $A_{ji} = \lambda_i^2 / (\lambda_{si}^2 - \mu_{ji}^2)$, ($j=1, 2$; 以下同)。

由微分方程理论可知: 式(10), (12)必须使式(4)恒成立, 代入式(4)可知: 两式无法精确的满足式(4), 在此, 利用微分方程的近似解法—子域法, 也就是使式(10), (12)满足如下两个积分方程:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{h_i} \left\{ \frac{d^2 w_{pi}(z_i)}{dz_i^2} - \frac{2k_p}{E_p r_{pi}} [w_{pi}(z_i) - w_{si}(z_i)] \right\} dz_i &= 0; \\ \int_{\frac{h_i}{2}}^{h_i} \left\{ \frac{d^2 w_{pi}(z_i)}{dz_i^2} - \frac{2k_p}{E_p r_{pi}} [w_{pi}(z_i) - w_{si}(z_i)] \right\} dz_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将式(10), (12)代入式(13)可得待定系数为

$$\left. \begin{aligned} c_5 &= \beta_{1i} c_1 + \gamma_{1i} c_2 + \beta_{2i} c_3 + \gamma_{2i} c_4; \\ c_6 &= \eta_{1i} c_1 + \xi_{1i} c_2 + \eta_{2i} c_3 + \xi_{2i} c_4 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ji} &= \alpha_{ji} (1 - e^{(\lambda_{si} + \mu_{ji}) h_i / 2}) / (1 - e^{\lambda_{si} h_i / 2}); \\ \gamma_{ji} &= \alpha_{ji} (e^{-\mu_{ji} h_i / 2} - e^{(\lambda_{si} - 2\mu_{ji}) h_i / 2}) / (1 - e^{\lambda_{si} h_i / 2}); \\ \alpha_{ji} &= \lambda_{si} e^{\lambda_{si} h_i / 2} (e^{\mu_{ji} h_i / 2} - 1) (1 - A_{ji} - \mu_{ji}^2 / \lambda_{pi}^2) / \\ &\quad (e^{\lambda_{si} h_i / 2} - 1) \mu_{ji}; \\ \eta_{ji} &= \alpha_{ji} - \beta_{ji} e^{\lambda_{si} h_i / 2}; \quad \xi_{ji} = \alpha_{ji} e^{-\mu_{ji} h_i / 2} - \gamma_{ji} e^{\lambda_{si} h_i / 2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

将式(10), (12)分别代入式(5), (7), 同时, 考虑式(14), 可得桩身截面及承台下桩周土截面上的轴力计算式 $P_i(z_i)$, $P_{si}(z_i)$, 并将其计算式与式(10), (12)一起写成矩阵形式, 即

$$X_i(z_i) = H_i(z_i) C \quad (16)$$

式中 $X_i(z_i)$ 为第 i 段桩土任意截面状态向量, $X_i(z_i) = [w_{pi}(z_i) \quad P_i(z_i) \quad w_{si}(z_i) \quad P_{si}(z_i)]^T$; C 为待定系数矩阵, $C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T$; $H_i(z_i)$ 为过渡矩阵。

$$H_i(z_i) = \begin{bmatrix} e^{\mu_{1i} z_i} & e^{-\mu_{1i} z_i} & e^{\mu_{2i} z_i} & e^{-\mu_{2i} z_i} \\ \varphi_{1i}(z_i) & \theta_{1i}(z_i) & \varphi_{2i}(z_i) & \theta_{2i}(z_i) \\ F_{1i}(z_i) & G_{1i}(z_i) & F_{2i}(z_i) & G_{2i}(z_i) \\ f_{1i}(z_i) & g_{1i}(z_i) & f_{2i}(z_i) & g_{2i}(z_i) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ji}(z_i) &= -E_p \pi r_{pi}^2 \mu_{ji} e^{\mu_{ji} z_i}; \quad \theta_{ji}(z_i) = E_p \pi r_{pi}^2 \mu_{ji} e^{-\mu_{ji} z_i}; \\ F_{ji}(z_i) &= \beta_{ji} e^{\lambda_{si} z_i} + \eta_{ji} e^{-\lambda_{si} z_i} + A_{ji} e^{\mu_{ji} z_i}; \\ G_{ji}(z_i) &= \gamma_{ji} e^{\lambda_{si} z_i} + \xi_{ji} e^{-\lambda_{si} z_i} + A_{ji} e^{-\mu_{ji} z_i}; \\ f_{ji}(z_i) &= -E_s (ab - \pi r_{pi}^2) \cdot \\ &\quad (\beta_{ji} \lambda_{si} e^{\lambda_{si} z_i} - \eta_{ji} \lambda_{si} e^{-\lambda_{si} z_i} + A_{ji} \mu_{ji} e^{\mu_{ji} z_i}); \\ g_{ji}(z_i) &= -E_s (ab - \pi r_{pi}^2) \cdot \\ &\quad (\gamma_{ji} \lambda_{si} e^{\lambda_{si} z_i} - \xi_{ji} \lambda_{si} e^{-\lambda_{si} z_i} - A_{ji} \mu_{ji} e^{-\mu_{ji} z_i}), \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2) \quad (18)$$

本问题的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} w_{pi}(z_i) \Big|_{z_i=0} &= w_{pi}(0), \quad w_{si}(z_i) \Big|_{z_i=0} = w_{si}(0); \\ P_i(z_i) \Big|_{z_i=0} &= -P_i(0), \quad P_{si}(z_i) \Big|_{z_i=0} = -P_{si}(0) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中 $w_{pi}(0)$, $P_i(0)$ 分别为第 i 段桩底截面的位移和轴力; $w_{si}(0)$, $P_{si}(0)$ 分别为第 i 段桩周土底截面的位移和轴力。

将式(19)代入式(16), 可得待定系数矩阵为

$$C=H_i^{-1}(0)X_i(0) \quad (20)$$

式中 $H_i^{-1}(0)$ 为 $z_i=0$ 时, $H_i(z_i)$ 矩阵的逆矩阵;

$X_i(0)$ 为第 i 段桩底和桩周土底截面状态向量,

$$X_i(0)=[w_{pi}(0) \quad -P_i(0) \quad w_{si}(0) \quad -P_{si}(0)]^T$$

将式(20)代入式(16)可得第 i 段桩土任意截面状态向量与该段桩底及土底截面状态向量的关系为

$$X_i(z_i)=D_i(z_i)X_i(0) \quad (21)$$

式中 $D_i(z_i)$ 为第 i 段桩土的传递矩阵,

$$D_i(z_i)=H_i(z_i)H_i^{-1}(0).$$

利用式(21)可逐段求出在任意承台荷载作用下, 桩截面及承台下桩周土截面上的位移和轴力, 从而, 可得出桩截面与桩周土截面上的轴力及位移随深度变化的规律。

各段之间的连续性条件为

$$X_{i+1}(0)=X_i(h_i), \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (22)$$

式中 $X_{i+1}(0)$ 为第 $i+1$ 段桩及桩周土底截面状态向量;

$X_i(h_i)$ 为第 i 段桩及土顶截面状态向量; $X_{i+1}(0)=[w_{pi+1}(0) \quad -P_{i+1}(0) \quad w_{si+1}(0) \quad -P_{si+1}(0)]^T$; $X_i(h_i)=[w_{pi}(h_i) \quad P_i(h_i) \quad w_{si}(h_i) \quad P_{si}(h_i)]^T$ 。

由式(21), 并利用连续性条件式(22)可得桩顶及桩周土顶截面状态向量与桩底及桩周土底截面状态向量的关系为

$$X_N=(\prod_{i=N}^1 D_i(h_i))X_b \quad (23)$$

式中 X_N 为桩顶截面状态向量, $X_N=[s_p \quad P_p \quad s_t \quad P_t]^T$, s_p, s_t 分别为桩顶及桩周土顶沉降; P_p, P_t 分别为桩顶及桩周土顶荷载; X_b 为桩底及桩周土底截面状态向量, $X_b=[s_b \quad -k_b A_b s_b \quad s_s \quad -k_s A_s s_s]^T$; A_b 为桩底截面积; A_s 为桩周土底截面积。

利用式(23)可方便地绘制出任意承台荷载作用下桩顶及桩周土顶、承台的荷载-沉降曲线。

采用本方法计算的步骤是: 首先, 利用式(23)列出桩顶沉降和桩周土顶沉降相等的方程, 即通过 $s_p=s_t$ 确定桩底位移 s_b 和桩周土底位移 s_s 的关系式。再假设一系列的桩底位移 $s_{b1}, s_{b2}, \dots$, 并利用 s_b 与 s_s 的关系式确定相应的桩周土底位移 $s_{s1}, s_{s2}, \dots$ 然后, 利用式(21)可逐段求出任意桩底位移所对应的桩截面及承台下桩周土截面上的位移和轴力, 利用式(23)可绘制出桩顶及桩周土顶、承台的荷载沉降曲线。本文方法同样适用于桩顶沉降和桩周土顶沉降不相等, 但桩顶荷载及桩周土顶荷载为已知或桩顶荷载和土顶荷载相等时截面上轴力、位移及荷载与沉降关系的确定。

4 算例与分析

算例 1: 设两柔性单桩承台, 其中, 一承台下为变截面柔性单桩; 另一承台下为体积相同的等截面柔性单桩; 等截面桩半径为 0.25 m, 变截面桩底半径为 0.1 m, 承台尺寸均为 1.0 m×1.0 m, 桩长均为 10.0 m, 桩的弹性模量 $E_p=150$ MPa。取计算参数 $k_p=1200$ kPa/m, $k_s=900$ kPa/m, $k_b=2500$ kPa/m, 桩周土的变形模量为 $E_s=1.5$ MPa。图 4~6 分别为承台上总荷载 $P=200$ kN 时, 变截面桩与等截面桩的轴向力和轴向位移、桩侧摩阻力随深度 z 变化的关系曲线。由图 4 可看出, 变截面桩分担的荷载比等截面桩分担的荷载大, 但变截面桩传至桩底的轴力反而比等截面桩传至桩底的轴力要小, 同时, 由图 5 可看出: 变截面桩桩顶沉降反而比等截面桩桩顶沉降要小, 这主要是由于变截面桩侧摩阻力比等截面桩侧摩阻力大, 图 6 证实了这一点。图 7, 8 分别为变截面和等截面桩、承台的荷载沉降曲线。由图 7, 8 可看出: 变截面桩及承台的承载力均大于等截面桩及承台的承载力。因此, 改变桩型对桩的荷载传递有一定影响, 并能提高单桩及相应的单桩承台的承载力。

算例 2: 模型实验。该模型实验在为 1.5 m×1.5 m×1.5 m 的钢制箱中进行, 承台尺寸为 0.4 m×0.4 m, 桩长为 1.0 m, 桩体材料为水泥与粘土混合料, 水

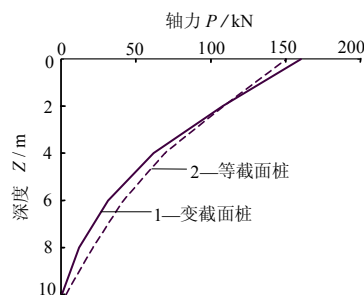


图 4 桩身轴力与深度的关系

Fig. 4 Relation between axial force in pile and depth

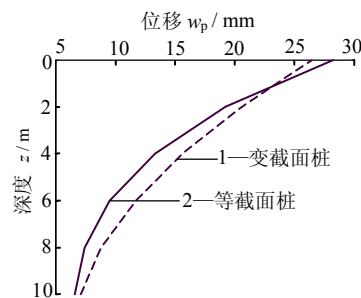


图 5 桩轴向位移与深度的关系

Fig. 5 Relation between axial displacement and depth

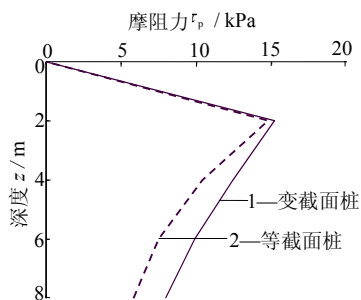


图6 桩侧摩阻力与深度的关系

Fig.6 Relation between skin friction and depth

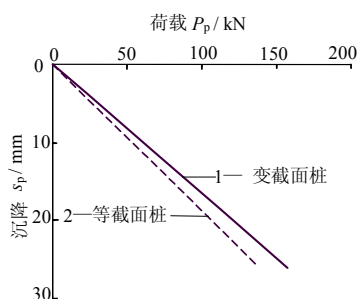


图7 桩顶荷载-沉降曲线

Fig.7 Load-settlement curve of pile-top

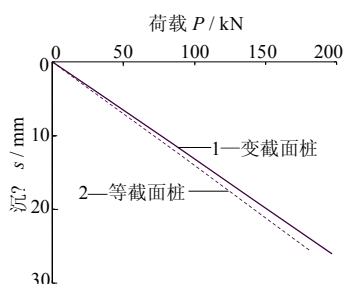


图8 承台荷载沉降曲线

Fig.8 Load-settlement curve of the pile cap

泥渗入量为 10%，桩顶直径为 0.2 m，桩底直径为 0.1 m。成桩方式：首先采用钢制模具静压成孔，然后夯填混合料，并在桩的对称轴上置一直径约 2.5 cm 伸至桩端的塑料管，且每隔 0.2 m 沿侧面对称粘应变片，以便测量相应位置的应变，并通过所测应变值确定桩截面上的内力。由室内试验测得桩的弹性模量为 $E_p = 148.5 \text{ MPa}$ ，桩周土压缩模量 $E = 3.15 \text{ MPa}$ ，然后，利用 $E_s = E[1 - 2\mu^2 / (1 - \mu)]$ 确定土的变形模量。由孔底静载实验测得 $k_b = 1.85 \times 10^3 \text{ kPa/m}$ ，取模型桩侧土压力的平均值作为直剪试验的法向应力。由直剪试验测得 $k_p = 856 \text{ kPa/m}$ ， $k_s = 782 \text{ kPa/m}$ 。图 9 为作用在承台上的荷载是 6 kN 时，桩身轴力沿深度 z 变化的关系曲线；图 10 为承台的荷载-沉降曲线；由图 9, 10 可看出，实测值与计算值相当接近。这说明本文方法是可行的。

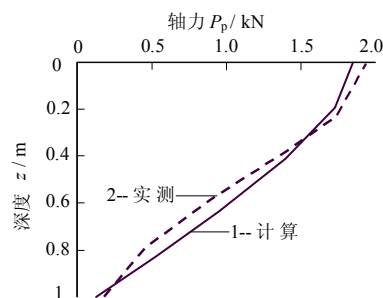


图9 桩身轴力与深度的关系

Fig.9 Relation between axial force in pile and depth

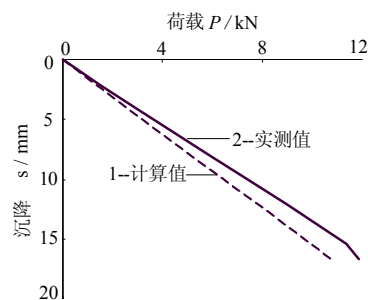


图10 荷载-沉降曲线

Fig.10 Load-settlement curve of the pile cap

5 结语

(1) 本文提出了变截面柔性桩复合地基的概念；提出了刚性承台下变截面柔性单桩与地基相互作用的解析算法，且推导出了一系列的近似解析算式，这对工程设计有一定的指导意义。

(2) 指出了：改变桩型能提高单桩及其单桩承台的承载力。

参考文献

- [1] 龚晓南. 复合地基的理论与实践[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996.
- [2] 马海龙, 费勤发. 工厂柔性桩荷载传递机理研究[J]. 同济大学学报, 1997, 25(3): 287—292.
- [3] 段继伟. 柔性桩复合地基的数值分析[博士论文 D]. 杭州: 浙江大学, 1993.
- [4] 蒋镇华, 龚晓南, 曾国熙. 成层土单桩有限元单元分析[J]. 浙江大学学报, 1996, 30(4): 13—16.
- [5] 杨涛. 复合地基沉降计算理论、位移反分析模型和二灰土桩软基加固试验研究[博士学位论文 D]. 南京: 河海大学, 1997.
- [6] 陈竹昌, 王建华. 采用弹性理论分析搅拌桩性能的探讨[J]. 同济大学学报, 1993, 21(1): 17—25.
- [7] 阎明礼, 张东刚. CFG 桩复合地基技术及工程实践[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001.
- [8] 张之颖, 吕刚. 异形灰土井桩承载特性的实测结果[J]. 建筑结构, 1996.
- [9] 张之颖, 杨荣. 异形灰土井桩桩型效应的非线性有限元分析[J]. 建筑结构, 1996, (4): 32—34.
- [10] 张之颖, 强新毅. 异形灰土井桩桩型效应研究[J]. 建筑结构, 1996, (4): 35—37.
- [11] 强新毅, 张之颖. 园楔形灰土井桩的设计计算[J]. 建筑结构, 1996, (4): 38—40.

